$A\times B = \{(a,b) : a\in A \wedge b\in B\}$

Π.χ. $A=\{1,2,3\}$

$B=\{1,4\}$

$A\times B = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

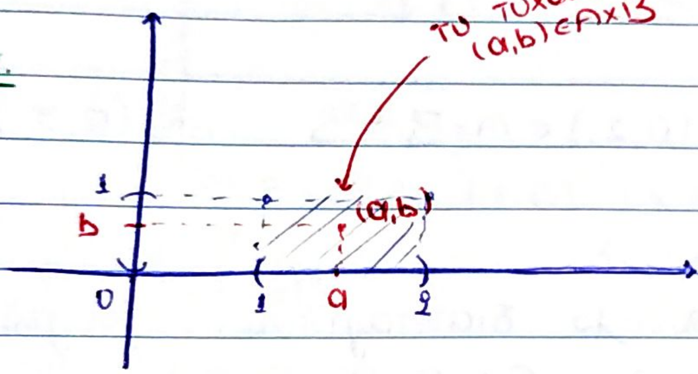
Παρατήρηση: $(1,2)\neq(2,1)$

αλλά $\{1,2\}=\{2,1\}$

λόγω της ιδιότητας: $\underbrace{(a,b)}_{\text{διατετ. ζεύγος}}=(x,y) \Leftrightarrow (a=x)\wedge(b=y)$

$(a,b)\neq(x,y) \Leftrightarrow (a\neq x)$ ή $(b\neq y)$

Π.χ.



$A=(1,2)$

$B=(0,1)$

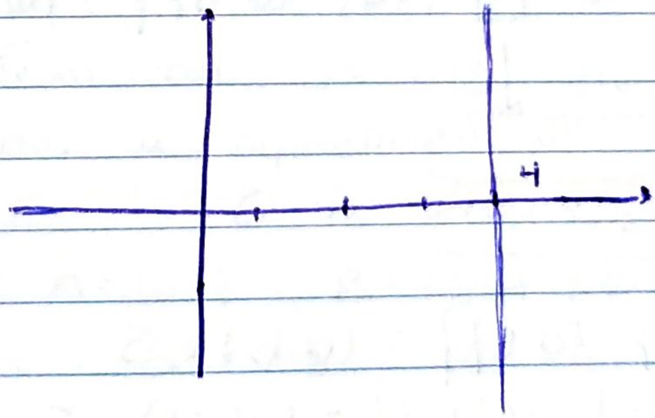
$A\times B = ;$

$A\times B = \{(a,b) : a\in(1,2),\ b\in(0,1)\}$ = τετράγωνο

Π.χ. $A=\{4\}$

$B=\mathbb{R}$

$A\times B = ;$



Αντιπαράδ.: Αν και δίνεται ένα $S\subset\mathbb{R}^2$

$\nexists A,B\subseteq\mathbb{R} : S=A\times B$

$S=\{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)\}\subseteq\mathbb{R}^2$

→

Το S γράφεται ως $A\times B$;

Ναι !! $A=\{0,2\}$ κ. $B=\{0,2\}$

$A\times B=\{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)\}=S$

• αν $S=\{(0,0),(2,0),(2,2)\}$ γράφεται το S σαν $A\times B$ όπου $A,B\subset\mathbb{R}$;

Έστω ότι $\exists A,B : S=A\times B$

$$\left.\begin{array}{l}(0,0)\in S \Rightarrow (0,0)\in A\times B\\ (2,0)\in S \Rightarrow (2,0)\in A\times B\\ (2,2)\in S \Rightarrow (2,2)\in A\times B\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}0\in A,\ 0\in B\\ 2\in A\\ 2\in B\end{array}$$

$\Rightarrow (0,2)\in A\times B=S \Rightarrow (0,2)\in S$

<u>Πρόταση</u>: Αν S σύνολο διατεταγμένων ζευγών $\Rightarrow \exists A,B : S\subseteq A\times B$

<u>Αποδ.</u>:

Έστω τυχαίο $x\in S$, S σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

Τότε το $\boxed{x}=\{\{a\},\{a,b\}\}=(a,b)$, για κάποια <u>$a,b$</u>

$\boxed{x}$: το τυχαίο στοιχείο του S

(a,b): $=x\in S$

$x=\{\{a\},\{a,b\}\}=(a,b)\in S$

$x'=\{\{a'\},\{a',b'\}\}=(a',b')\in S$

$x''=\{\qquad\qquad\}=(a'',b'')\in S$

$x\in S$

$\underbrace{\bigcup_{x\in S} x}_{\text{σύνολο}}=T$

$y\in T \Longleftrightarrow \exists a,b : (a,b)\in S$ με $y=\{a\}$ ή $y=\{a,b\}$

$R = \bigcup_{z \in T} z$: περιέχει τα a, b που εμφανίζονται στον ορισμό του εκάστοτε $x \in S$,

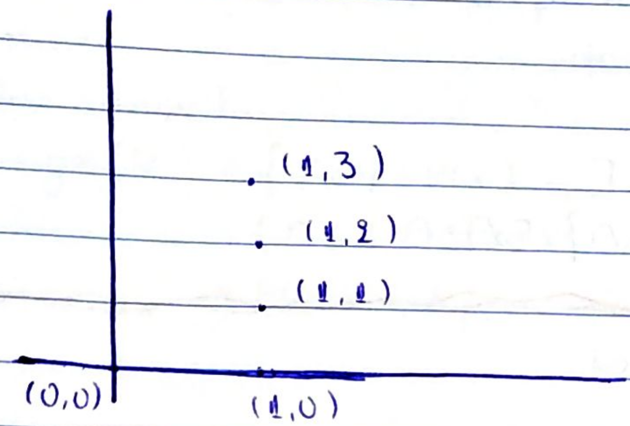
$$x = (a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

$$\downarrow$$

$S \subseteq R \times R$ διότι:

αν $x \in S \Rightarrow$ το x γράφεται $x = (a,b) \in R \times R$

Π.χ.



$S = \{(0,0), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3)\}$

$\subseteq A \times B$, $\{0,1\} \subseteq A$, $\{0,1,2,3\} \subseteq B$

$(0,0) \in A \times B$

$(1,0), (1,1), (1,2), (1,3) \in A \times B$

$0 \in A$, $0 \in B$

$1 \in A$, $0,1,2,3 \in B$

δηλ. για να ισχύει ότι $S \subseteq A \times B$ για το συγκεκριμένο S πρέπει κ' αρκεί $\boxed{\{0,1\} = A' \subseteq A}$ $\boxed{\{0,1,2,3\} = B' \subseteq B}$

$A = \{0,1\}$, $B = \{0,1,2,3\}$

$S \subseteq A \times B$

Ισχύει κ' το αντίστροφο? ΝΑΙ!!

Άρα: S σύνολο διατετ. ζευγών $\Leftrightarrow \exists A, B$ σύνολα: $S \subseteq A \times B$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ορίζουμε σχέση R, από το A στο B, ένα R υποσύνολο του $A\times B$. $\boxed{R \subseteq A\times B}$

A, B ποια η μεγαλύτερη κ. ποια η μικρότερη σχέση του $A\times B$?

$\downarrow$ $A\times B$ (μεγαλύτερη)

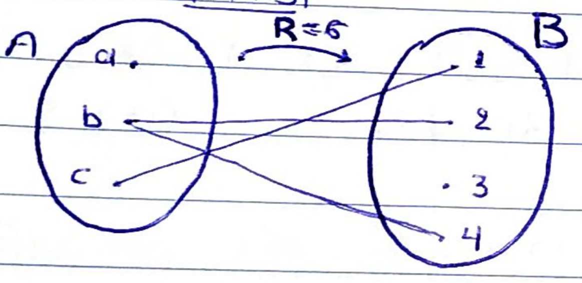
$\downarrow$ $\emptyset$ (μικρότερη)

$A=B$, $R\subseteq A\times A$

$R = \Delta_A = \{(x,x) : x\in A\} \subseteq A\times A$

ΥΠΕΝΘ. από Θεμελ. :

$R \subseteq \boxed{A\times B}$



$R=\sigma=\{(b,2),(b,4),(c,1)\}$
$\subseteq A\times B$
↳ σχέση στο $A\times B$

$D(R) = \{ a\in A \ \exists b\in R : (a,b)\in \overset{\sigma}{R} \}$

$Range(R) = \{ b\in B \ \exists a\in A : (a,b)\in R \}$

Άρα στην περίπτωσή μας: $D(R)=\{b,c\}$

$Range(R)=\{1,2,4\}$

ΠΑΡΑΔ. $\phi \neq X$ σύνολο. Δημιουργούμε το $P(X) = Y$

Ορίζουμε σχέση R στο $X \times Y = X \times P(X)$ ως εξής:

$$(x,A)\in R \overset{\text{ορ.}}{\iff} x\in A$$

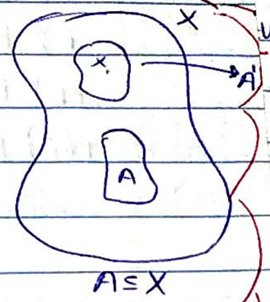
$D(R) = \text{Π.Ο.}(R)$

$= \{x\in X : \exists A\in P(X) : \underbrace{xRA}_{\text{δηλ. } (x,A)\in R}\}$

$=\{x\in X : \exists A\subseteq X : x\in A\} = X$ φανερά

$x\in A' \iff xRA'$

$x\notin A \iff x \not R A$



(πεδίο τιμών)

$\text{Range}(R) = \{A\in Y = P(X) : \exists x\in X : (x,A)\in R\}$

$= \{A\subseteq X : \exists x\in X : x\in A\}$

$= P(X)\setminus\{\emptyset\}$

ΠΑΡΑΔ: X σύνολο. $R = \Delta_X \subseteq X\times X$

$\Delta_X = \{(x,x) : x\in X\}$

R η διαγώνιος στο X, σχέση από το X στο X

$D(R) = \{x\in X : \exists y\in X : (x,y)\in R\}$

$= \{x\in X : \exists y\in X : x=y\}$

$= X$

$$\boxed{\begin{array}{l} R=\Delta_X \\ (x,y)\in R \iff y=x \end{array}}$$

$\text{Range}(R) = \{y\in X : \exists x\in X : xRy\}$

$= \{y\in X : \exists x\in X : x=y\} = X$

Σχέσεις ισοδυναμίας

$R \subseteq X \times X$ (X σύνολο)

(διμελής σχέση στο X)

i) R αυακλαστική, όταν $(x,x) \in R \quad \forall x \in X$

ii) R συμμετρική, όταν $(x,y) \in R \overset{\forall x,y \in X}{\Longrightarrow} (y,x) \in R$

iii) R μεταβατική, όταν δηλ.:

$\forall x,y,z \in X \quad (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

Στο ΠΑΡΑΔ. μας: $R = \Delta_X = \{(x,x) : x \in X\} \subseteq X \times X$

i) Άμεση

ii) αν $(x,y) \in R \Rightarrow (y=x) \Rightarrow (x,x) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

iii) μεταβατικότητα: $\boxed{\text{Άσκηση}}$

Δ_X η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο X

Αν S σχέση ισοδυναμίας στο X $\quad \Delta_X = R \subseteq S$ (S αυθαίρετο)

Άρα κάθε σχέση ισοδυναμίας S στο X περιέχει

άρα R η μικρότερη δυνατή σχέση ισοδυναμίας στο X

$R' = \{(x,y) : x,y \in X\} = X \times X$

i) εξασφαλ. $\Delta_X \subseteq R'$

ii) $(x,y) \in R' \Rightarrow (y,x) \in R'$ (φανερό)

iii) Εύκολα (μεταβ.)

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Διαμέριση C συνόλου X ονομάζουμε μια C συλλογή από ξένα ανά δύο, υποσύνολα του X μη κενά, των οποίων η ένωση είναι όλο το X.

Π.χ. • $X=\{1,2,3,4,5\}$

$C_1=\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$

$C_2=\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}$

• $\mathbb{N}$

$C_1=\{\mathbb{N}_a,\mathbb{N}_n\}$

άρτιοι περιττοί

$C_2=\{\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\}, \dots\}$

και περιέχει άπειρα το πλήθος $\subseteq \mathbb{N}$, ως στοιχεία

• $\mathbb{R}$

$C=\{\mathbb{Q},\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$

(διαμέριση του $\mathbb{R}$)

Μια άπειρη διαμέριση του $\mathbb{R}$ είναι η εξής:

$_0[\ \ )_1[\ \ )_2[\ \ )_3$

$C=\{[n,n+1),\ n\in\mathbb{Z}\}$

άπειρα το πλήθος στοιχεία

Παρατήρηση: R $\boxed{\text{σχέση ισοδυναμίας}}$ σε ένα σύνολο X. Τότε από την R προκύπτει φυσιολογικά κ. μια διαμέριση του X κ. αντίστροφα

($\Rightarrow$) Έστω R σχέση ισοδυναμίας στο X.

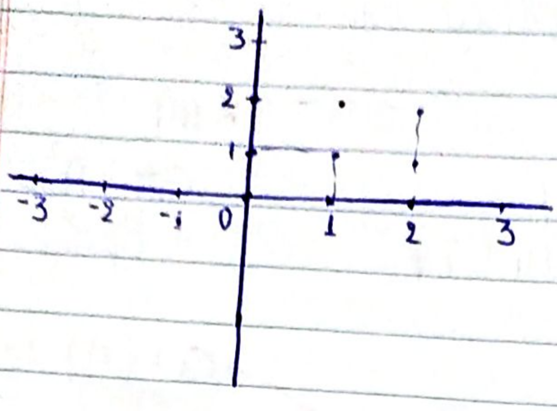
Ορίζουμε $\forall x\in X$, $[x]_R=\kappa\lambda_R(x)=\{y\in X : (x,y)\in R\}$

$=\{y\in X : xRy\}$

$X/\sim\ =\{[x]_R : x\in X\}$

R στο $\mathbb{Z}$, $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\boxed{(n,m) \in R} \Longleftrightarrow n-m$ πολ/σιο του $\mathbb{Z}$



ΠΑΡΑΔ. $n, m \in \mathbb{Z}$

$(n,m) \in R \Longleftrightarrow 2 \mid n-m$

Είναι σχέση ισοδυναμίας;

i) $(n,n) \in R$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad 2 \mid 0$

ii) $\forall n,m \in \mathbb{Z}$ $(n,m) \in R \Longrightarrow n-m = 2\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow m-n = 2 \cdot (-\kappa)$

$\Longrightarrow (m,n) \in R$

iii) $\left.\begin{matrix} (n,m) \in R \\ (m,\lambda) \in R \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (n,\lambda) \in R$

$n - \cancel{m} = 2\kappa_1$, $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}$

$\cancel{m} - \lambda = 2\kappa_2$

$\downarrow$

$n - \lambda = 2(\kappa_1 + \kappa_2) = 2\ell \Longrightarrow (n, \ell) \in R$

ΠΑΡΑΔ κλάσης: $n \in \mathbb{Z} = X$, $[n]_R \overset{\text{παραδ.}}{=} \{ m \in \mathbb{Z} : (n,m) \in R \;\; (m,n) \in R \}$

$= \{ m \in \mathbb{Z} : 2 \mid n-m \}$

$[1]_R = \{ m \in \mathbb{Z} : 2 \mid 1-m \}$

$[0]_R = \{ m \in \mathbb{Z} : 2 \mid 0-m \}$

$X/R = \{ [x]_R : x \in X \}$

$\mathbb{Z}/R = \{ \mathbb{Z}_\alpha , \mathbb{Z}_\pi \} = \{ \underset{\neq \emptyset}{[0]_R} , \underset{\neq \emptyset}{[1]_R} \}$ διαμέριση του $\mathbb{Z} = X$